特異点定義方程式のパラメータに関する簡単化の提案 (Computer Algebra : Design of Algorithms, Implementations and Applications)

高橋, 正

数理解析研究所講究録
第 1666 巻 2009 年 135-138

特異点定義方程式のパラメータに関する簡単化の提案

高橋　正
TADASHI TAKAHASHI
神戸大学人間発達環境学研究科
GRADUATE SCHOOL OF HUMAN DEVELOPMENT AND ENVIRONMENT, KOBE UNIVERSITY *

1　はじめに

私は、これまで、グレブナー基底を用いて、simple K3 特異点定義方程式の退化条件導出に関する研究を行ってきた。特異点定義方程式のパラメータは、様々な表示が可能であり、その退化条件を表す関係式も、最初に設定するパラメータの表示に依存する。そのパラメータ空間の構造は本質的には同じものを表している。それならば、その構造を端的に示す最も簡単な関係式が望ましい。

2　これまでに調べたこと

Simple K3 特異点定義方程式の退化条件導出に関して、パラメータ空間の次元が 1，2 であるものについては、以下の結果を得た（[1]）。

No.	The defining equations
f_{52}	$x^3+\lambda xyzw+xz^3+y^4+zw^4$
f_{56}	$x^2y+y^3z+\lambda yz^2w^2+z^5+w^6$
f_{73}	$x^2+y^5+\lambda y^2z^2w^2+yz^5+zw^6$

No.	The non-degeneracy conditions
f_{52}	$\lambda^4-256\neq 0$
f_{56}	$\lambda^3+27\neq 0$
f_{73}	$\lambda^3+27\neq 0$

パラメータが 1 つだと、simple elliptic singlarities の時と同じような関係式となる。

No.	The defining equations
f_{46}	$x^2+y^3+\lambda yz^4w^4+z^{11}+\mu z^6w^6+zw^{12}$
f_{61}	$x^2z+y^4+\lambda y^2zw^2+z^4w+\mu z^2w^4+w^7$
f_{65}	$x^2z+y^3+\lambda yz^2w^4+z^6w+\mu z^3w^6+w^{11}$
f_{80}	$x^2+y^3z+\lambda yz^3w^4+z^8w+\mu z^4w^6+w^{11}$

*takahasi@kobe-u.ac.jp

No.	The non-degeneracy conditions
f_{46}	$(108+4\lambda^3-108\mu+27\mu^2)(108+4\lambda^3+108\mu+27\mu^2)\neq 0$
f_{61}	$(-2+\lambda)(2+\mu)(-8+\lambda^2-4\mu)(8+\lambda^2-4\mu)\neq 0$
f_{65}	$(108+4\lambda^3-108\mu+27\mu^2)(108+4\lambda^3+108\mu+27\mu^2)\neq 0$
f_{80}	$(108+4\lambda^3-108\mu+27\mu^2)(108+4\lambda^3+108\mu+27\mu^2)\neq 0$

パラメータが2つになると、人間の煩悩のように $108=2^2 3^3$ が沢山出てくる。このくらいになると、もっと、簡単な表示ができないかと思えてくる。

3 特異点定義方程式のパラメータに関する簡単化とは？

特異点定義方程式のパラメータを簡単化するとは、表記するパラメータの個数を少なくするという考え方がある。その考え方だけをとるのであれば、上記の方法でよい。しかし、求める退化条件を簡単化するためには、退化条件から逆に考えることが必要になる。

退化条件を最も簡単な表記にするパラメータ設定を考えてみる。その時、simple $K3$ 特異点定義方程式のパラメータを以下のように設定することができる（[1]）。

No.	The defining equations
f_{52}	$x^3+4\lambda xyzw+xz^3+y^4+zw^4$
f_{56}	$x^2y+y^3z+3\lambda yz^2w^2+z^5+w^6$
f_{73}	$x^2+y^5+3\lambda y^2z^2w^2+yz^5+zw^6$

No.	The non-degeneracy conditions
f_{52}	$\lambda^4-1\neq 0$
f_{56}	$\lambda^3+1\neq 0$
f_{73}	$\lambda^3+1\neq 0$

No.	The defining equations
f_{46}	$x^2+y^3+3\lambda yz^4w^4+z^{11}+2\mu z^6w^6+zw^{12}$
f_{61}	$x^2z+y^4+2\sqrt{2}\lambda y^2zw^2+z^4w+2\mu z^2w^4+w^7$
f_{65}	$x^2z+y^3+3\lambda yz^2w^4+z^6w+2\mu z^3w^6+w^{11}$
f_{80}	$x^2+y^3z+3\lambda yz^3w^4+z^8w+2\mu z^4w^6+w^{11}$

No.	The non-degeneracy conditions
f_{46}	$(\lambda^3+\mu^2+1)^2-4\mu^2\neq 0$
f_{61}	$(\mu^2-1)((\lambda^2-\mu)^2-1)\neq 0$
f_{65}	$(\lambda^3+\mu^2+1)^2-4\mu^2\neq 0$
f_{80}	$(\lambda^3-\mu^2+1)^2-4\mu^2\neq 0$

この2系統に関しては、$\mu=0$ の時、パラメータが1つの場合に一致する。

数学的な美くしさとは？
その美しさの下での moduli 空間の構造とは？

私は、特異点定義方程式のパラメータの簡単化とは、退化条件を最も簡単な式として表現できるパラメータ表示をすることと提案したい。数式処理システムを用いることで、退化条件を最も簡単な式にするパラメータ表示を見出すことが容易になる。このようにパラメータを設定をすることは、退化条件導出計算を省力化することにもなる。

4 まだ渾沌としていること

Simple K3 特異点定義方程式の退化条件導出において、パラメータ空間の次元が２，３であるものについても、まだ、以下のように美しいとは言いがたい状況のものが多い。

No.	The defining equations
f_{30}	$x^2+y^5+5\lambda y^2z^2w^2+5\mu yzw^5+z^5w+w^8$
f_{84}	$x^3+\lambda xyzw+xz^3+y^3z+yw^4+\mu z^2w^3$
f_{86}	$x^2y+xw^4+y^3w+5\lambda yz^2w^2+z^5+5\mu zw^5$
f_{91}	$x^2+y^4z+3\lambda y^2z^2w^2+yz^5+yw^6+3\mu z^3w^4$

No.	The non-degeneracy conditions
f_{30}	$16\lambda^5+20\lambda^2\mu-40\lambda^4\mu^2-45\lambda\mu^3+25\lambda^3\mu^4+27\mu^5+1\neq 0$
f_{84}	$(\lambda^2-\lambda^3\mu-27\mu^2)^2-4(9\lambda\mu-8)^2\neq 0$
f_{86}	$64\lambda^5+80\lambda^2\mu+600\lambda^4\mu^2+720\lambda\mu^3+1600\lambda^3\mu^4+1728\mu^5-1\neq 0$
f_{91}	$\mu(\lambda^3-12\lambda\mu-9\lambda^4\mu+24\lambda^2\mu^2-16\mu^3+1)\neq 0$

No.	The defining equations
f_{57}	$x^2y+axz^3+y^4+\lambda y^2w^3+\mu yz^2w^2+bz^4w+w^6(a\neq 0\ or\ b\neq 0)$
f_{57}	$x^2y+xz^3+y^4+\lambda y^2w^3+\mu yz^2w^2+\nu z^4w+w^6(for\ the\ above\ a\neq 0)$
f_{57}	$x^2y+y^4+\lambda y^2w^3+\mu yz^2w^2+z^4w+w^6(for\ the\ above\ a=0)$
f_{64}	$x^2z+axy^2+by^3w+\lambda y^2zw^2+\mu yz^2w^3+z^6+\nu z^3w^4+w^8(a\neq 0\ or\ b\neq 0)$
f_{64}	$x^2z+xy^2+\lambda y^2zw^2+\mu yz^2w^3+z^6+\nu z^3w^4+w^8(for\ the\ above\ a\neq 0)$
f_{64}	$x^2z+y^3w+\lambda yz^2w^3+z^6+\mu z^3w^4+w^8(for\ the\ above\ a=0)$
f_{68}	$x^2z+y^3+yz^5+\lambda yz^2w^4+\mu z^6w^2+\nu z^3w^6+w^{10}$
f_{74}	$x^2+y^4w+\lambda y^2z^2w^2+yz^5+\mu yzw^5+\nu z^4w^3+w^8$
f_{83}	$x^2+y^3+\lambda yz^4w^4+yw^9+z^{10}w+\mu z^6w^6+\nu z^2w^{11}$
f_{90}	$x^2+y^4z+\lambda y^2z^2w^2+\mu y^2w^5+z^5w+\nu z^3w^4+zw^7$
f_{92}	$x^2+y^3z+\lambda yz^3w^4+ayw^9+z^7w+\mu z^4w^6+bzw^{11}(a\neq 0\ or\ b\neq 0)$
f_{92}	$x^2+y^3z+\lambda yz^3w^4+yw^9+z^7w+\mu z^4w^6+\nu zw^{11}(for\ the\ above\ a\neq 0)$
f_{92}	$x^2+y^3z+\lambda yz^3w^4+z^7w+\mu z^4w^6+zw^{11}(for\ the\ above\ a=0)$

The non-degeneracy conditions are as follows:

f_{57} $(a\ \neq\ 0)$: $(-2+\lambda)(2+\lambda)(108-108\lambda+27\lambda^2-16\mu^3-144\mu\nu+72\lambda\mu\nu-16\mu^2\nu^2-128\nu^3+64\lambda\nu^3)(108+108\lambda+27\lambda^2-16\mu^3+144\mu\nu+72\lambda\mu\nu-16\mu^2\nu^2+128\nu^3+64\lambda\nu^3)\ \neq\ 0.$

f_{57} $(a\ =\ 0)$: $(-2+\lambda)(2+\lambda)(-8+4\lambda-\mu^2)(8+4\lambda-\mu^2)\ \neq\ 0.$

f_{64} $(a \neq 0)$: $(-512+512\lambda^2-128\lambda^4+288\lambda\mu^2-16\lambda^3\mu^2+27\mu^4+768\nu-512\lambda^2\nu+64\lambda^4\nu-144\lambda\mu^2\nu-384\nu^2+128\lambda^2\nu^2+64\nu^3)(512+512\lambda^2+128\lambda^4-288\lambda\mu^2-16\lambda^3\mu^2+27\mu^4+768\nu+512\lambda^2\nu+64\lambda^4\nu-144\lambda\mu^2\nu+384\nu^2+128\lambda^2\nu^2+64\nu^3) \neq 0.$

f_{64} $(a = 0)$: $(108+4\lambda^3-108\mu+27\mu^2)(108+4\lambda^3+108\mu+27\mu^2) \neq 0.$

f_{68} : $3125+16\lambda^5+4125\lambda^2\mu+16\lambda^7\mu+888\lambda^4\mu^2+16200\lambda\mu^3+16\lambda^6\mu^3+864\lambda^3\mu^4+11664\mu^5-5625\lambda\nu-16\lambda^6\nu-3420\lambda^3\mu\nu-13500\mu^2\nu-2592\lambda^2\mu^3\nu+2700\lambda^2\nu^2+216\lambda^4\mu\nu^2-5670\lambda\mu^2\nu^2+216\lambda^3\mu^3\nu^2-5832\mu^4\nu^2-216\lambda^3\nu^3+6075\mu\nu^3+729\lambda\mu\nu^4+729\mu^3\nu^4-729\nu^5 \neq 0.$

f_{74} : $3125+16\lambda^5+500\lambda^2\mu-8\lambda^4\mu^2-225\lambda\mu^3+\lambda^3\mu^4+27\mu^5-200\lambda^3\nu-5000\mu\nu-16\lambda^5\mu\nu-430\lambda^2\mu^2\nu+8\lambda^4\mu^3\nu+216\lambda\mu^4\nu-\lambda^3\mu^5\nu-27\mu^6\nu+4000\lambda\nu^2+16\lambda^6\nu^2+704\lambda^3\mu\nu^2+1800\mu^2\nu^2-8\lambda^5\mu^2\nu^2-296\lambda^2\mu^3\nu^2+\lambda^4\mu^4\nu^2+36\lambda\mu^5\nu^2-192\lambda^4\nu^3-2560\lambda\mu\nu^3+64\lambda^3\mu^2\nu^3+32\mu^3\nu^3-8\lambda^2\mu^4\nu^3+768\lambda^2\nu^4-128\lambda\mu^2\nu^4+16\mu^4\nu^4-1024\nu^5 \neq 0.$

f_{83} : $3125+16\lambda^5-5625\lambda\mu-16\lambda^6\mu+2700\lambda^2\mu^2-216\lambda^3\mu^3-729\mu^5+4125\lambda^2\nu+16\lambda^7\nu-3420\lambda^3\mu\nu+216\lambda^4\mu^2\nu+6075\mu^3\nu+729\lambda\mu^4\nu+888\lambda^4\nu^2-13500\mu\nu^2-5670\lambda\mu^2\nu^2+16200\lambda\nu^3+16\lambda^6\nu^3-2592\lambda^2\mu\nu^3+216\lambda^3\mu^2\nu^3+729\mu^4\nu^3+864\lambda^3\nu^4-5832\mu^2\nu^4+11664\nu^5 \neq 0.$

f_{90} : $\mu(-2+\nu)(2+\nu)(64-\lambda^4-96\lambda\mu+\lambda^5\mu+30\lambda^2\mu^2+\lambda^3\mu^3+27\mu^4+8\lambda^2\nu-8\lambda^3\mu\nu+72\mu^2\nu-\lambda^4\mu^2\nu-36\lambda\mu^3\nu-16\nu^2+16\lambda\mu\nu^2+8\lambda^2\mu^2\nu^2-16\mu^2\nu^3) \neq 0.$

f_{92} $(a \neq 0)$: $3125+16\lambda^5-5625\lambda\mu-16\lambda^6\mu+2700\lambda^2\mu^2-216\lambda^3\mu^3-729\mu^5+4125\lambda^2\nu+16\lambda^7\nu-3420\lambda^3\mu\nu+216\lambda^4\mu^2\nu+6075\mu^3\nu+729\lambda\mu^4\nu+888\lambda^4\nu^2-13500\mu\nu^2-5670\lambda\mu^2\nu^2+16200\lambda\nu^3+16\lambda^6\nu^3-2592\lambda^2\mu\nu^3+216\lambda^3\mu^2\nu^3+729\mu^4\nu^3+864\lambda^3\nu^4-5832\mu^2\nu^4+11664\nu^5 \neq 0.$

f_{92} $(a = 0)$: $(108+4\lambda^3-108\mu+27\mu^2)(108+4\lambda^3+108\mu+27\mu^2) \neq 0.$

これらの関係式も、何か美しい表示が潜んでいるのではないかと考えている。それを見出すことは、数式処理システムではなく、人間の思考と洞察力であろう。

参 考 文 献

[1] T. Takahashi, An Application of Greobner Bases for the Moduli of Hypersurface Simple K3 Singularities, 数式処理, Vol. 11, No.3,4, pp. 43–55, 2005.